Posebni otisak »Hrvatske državne izmjere«.

Ing. Boris Apsen,
sveučilištni asistent:

Eötvös-ov

GRAVITACIONI VARIOMETAR

Njegova teorija i primjena u višoj geodeziji

RADNJA PRIHVAĆENA OD VIEĆA TEHNIČKOG FAKULTETA HRVATSKOG SVEUČILIŠTA U ZAGREBU KAO DISERTACIJA ZA POLUČENJE DOKTORATA TEHNIČKIH ZNANOSTI.

1942

TISKARA C. ALBRECHT (P. ACINGER), ZAGREB, RADIĆEVA ULICA 26

Referenti:
Prof. N. Abakumov
Prof. Dr. M. Prejac

Ing. Boris Apsen, sveučilištni asistent:

Eötvös-ov gravitacioni variometar

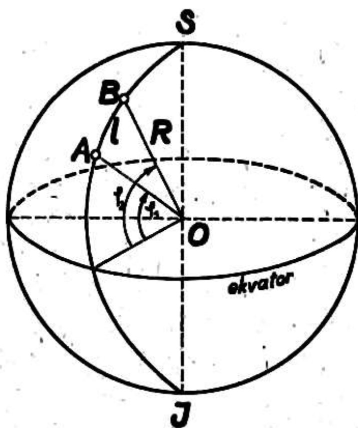
Njegova teorija i primjena u višoj geodeziji

I. TEORIJA I PRIMJENA INSTRUMENTA

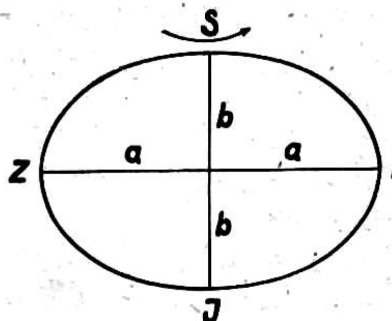
1. Oblik zemlje i njegovo odredivanje

Već od davnih vremena vidimo živo zanimanje čovječanstva za oblik i dimenzije zemlje. Od djetinjaste predočbe o zemljinom obliku kao ploče uokvirene oceanima (na pr. pjesme Homera 900—800 prije Krista) prelazi čovječanstvo na kuglin oblik zemlje. (Pitagora, rodj. 582 pr. K., Aristotel, 384—322 pr. K.). Mjerenja duljine luka zemljina meridiana, koja je započeo aleksandrijski učenjak Erastoten (276—195 pr. K.) i koja su nastavljena tokom vjekova, bio je onaj put, kojim je čovječanstvo najprije pošlo, da dodje do dimenzija našeg planeta.

Ta mjerenja su skup astronomskih i geodetskih opažanja.



Sl. 1.



Sl. 2.

U smjeru sjevero-jug označi se što točnije na zemljinoj površini dužina l i izmjeri geodetskim sredstvima, a u konačnim točkama A i B odrede se astronomskim putem geografske širine φ_1 i φ_2. Iz razlike širina dobije se tada izmjerenom luku pripadni središnji kut $(\varphi_2 - \varphi_1)$ pa se iz tog središnjeg kuta i luka računa zemljin polumjer R po formuli

$$R = \frac{l}{\varphi_2 - \varphi_1} \rho$$

gdje je ρ radiant (206 264",8). (Sl. 1.).

Ta astronomsko-geodetska mjerenja dala su ne samo dimenzije zemlje, već su i pokazala, da je zemljina kugla spljoštena na polovima. Tako je nastala nova aproksimacija obliku idealne zemljine plohe, odnosno mirne morske površine protegnute izpod kontinenata — rotacioni elipsoid, t. j. ploha, koja nastaje rotacijom elipse oko njezine male osi SJ. (Sl. 2.).

Sada se nije više tražila, kao prije, jedna nepoznanica — polumjer zemljine kugle R, već dvije nepoznanice: obje poluosi — velika a i mala b meridianske elipse ili jedna poluos i spljoštenost $\alpha = \frac{a-b}{a}$

Do istog se rezultata došlo mjerenjem sile teže s pomoću njihala. Značenje njihala za odredjenje sile teže i oblika zemlje bilo je prvi put shvaćeno prigodom Richer-ovih opažanja godine 1672. Francuzki astronom Richer morao je sekundno njihalo svoje njihalice, koja je pravilno išla u Parizu (48°50' sjev. širine) skratiti

u Cayenne-u (4°46' sjev. širine, dakle blizu ekvatora) za 3,5 mm, a nakon svog povratka u Pariz opet za isti iznos produljiti, da bi ga mogao upotriebiti na obim mjestima kao sekundno njihalo. Dnevno zaostajanje njihalice u Cayenne-u za 2½ minute nije se moglo raztumačiti razlikom temperature, pa su Huyghens i Newton obrazložili tu pojavu rotacijom naše planete i centrifugalnom silom izvedenom tom rotacijom, te spljoštenošću zemlje na polovima.

Budući da je Newton u ono vrijeme već odkrio svoj poznati zakon gravitacije, prema kojemu se dvije mase privlače silom, koja je upravno razmjerna produktu tih masa i obrnuto razmjerna kvadratu njihove udaljenosti, mogao je zaključiti, da je sila teže samo poseban slučaj obćeg zakona gravitacije. Newton reče: Ako sat zaostaje u Cayenne-u, njihalo se njiše presporo. Prema tome je sila teže manja u Cayenne-u nego u Parizu. To se i moglo očekivati, jer, ako se zemlja okreće, nastaje centrifugalna sila i to najjača na ekvatoru, jer je tamo obodna brzina najveća. Centrifugalna sila okrenuta je prema van, dok je sila privlačenja upravljena prema unutra. Iz zajedničkog djelovanja obiju sila nastaje kao rezultat ono, što mi zovemo silom teže. Sila teže jest dakle rezultanta centrifugalne sile i sile privlačenja zemlje.[1]) Kako obodna brzina okretanja opada prema polovima, opada i centrifugalna sila s prirastom geografske širine. U drugu ruku centrifugalna sila suprotstavlja se sili privlačenja u višim širinama samo dielom svoje vriednosti, jer je centrifugalna sila okomita na zemljinu os, dok je sila privlačenja upravljena prema središtu zemlje. Radi toga je preostali dio sile privlačenja veći ili, drugim riečima, sila teže, odnosno teža, raste što se više približujemo polovima. Taj prirast teže još će se pojačati spljoštenošću zemljina tiela.

Kada bi uspjelo dokazati, da izmedju promjene teže i spljoštenosti postoji zakonita veza, bio bi pronadjen traženi dokaz za spljoštenost zemlje. I dokaz je uspio. Već godine 1743. postavio je francuzki fizik Clairaut vrlo jednostavni zakon, koji sadržava traženi odnos u prvoj aproksimaciji i daje vezu izmedju teže, centrifugalne sile i oblika zemljine plohe, odnosno njezine spljoštenosti $\alpha = \frac{a - b}{a}$. U proširenom obliku Clairaut-ova formula glasi:

$$\alpha + \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{5}{2} \cdot \frac{f_0}{g_0} - \alpha \left(\alpha + \frac{f_0}{2g_0}\right) \qquad \ldots . 1)$$

Ovdje su: g_0 i g_1 — teža na ekvatoru, odnosno na polu, f_0 — akceleracija centrifugalne sile na ekvatoru.

Kako je vriednost f_0 poznata ($f_0 = \omega^2 . a$, gdje je ω kutna brzina zemljine rotacije, dok je a velika poluos zemljina elipsoida), može se po tom zakonu mjerenjem teže odrediti spljoštenost, a tim i oblik zemlje. Tako je postalo moguće astronomsko-geodetskim putem pronadjenu spljoštenost izpitati mjerenjem teže i rezultati su se odlično slagali. Izračunamo li veličine g_1 i g_0 po Helmertovoj formuli za normalnu težu (vidi dalje formulu 2), dobit ćemo za spljoštenost iz Clairaut-ove formule (1) vriednost $\alpha = 1 : 296,9$, koja podpuno odgovara spljoštenosti internacionalnoga elipsoida. Tim je bilo ostvareno zajedničko djelovanje astronomskih, geodetskih i geofizičkih mjerenja.

Prvobitno su prevladavala mjerenja lukova na zemljinoj površini. Osim mjerenja po meridianu vršila su se mjerenja i u smjeru okomitom na meridian. Svako

---

[1]) Kako se obćenito pod silom razumije produkt mase i akceleracije tiela, sila je brojno jednaka akceleraciji, ako se uzme, da masa tiela iznosi jedinicu. Stoga razloga govorit ćemo u daljnjem često mjesto o sili teže o njenoj akceleraciji. Akceleracija sile teže označuje se slovom g i ukratko zove teža.

novo mjerenje davalo je daljnje odredjenje istih veličina, tako da je nastala potreba izjednačenja dobivenih rezultata. Godina 1837.—1841. izračunao je Bessel dimenzije zemljinog rotacionog elipsoida na temelju izjednačenja rezultata dobivenih iz deset mjerenja.

Bessel-ov elipsoid ima ove dimenzije:

Kvadrant meridiana $Q = 10\,000\,855{,}76$ m
$\pm 498{,}23$ m

Velika poluos $a = 6\,377\,397{,}155$ m

Mala poluos $b = 6\,356\,078{,}963$ m

Spljoštenost $\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 : 299{,}1528$
$\pm 4{,}667$

Bessel-ove dimenzije našle su brzo sveobće priznanje i najširu primjenu. I ako postoji više rotacionih elipsoida, kojima se aproksimira matematički oblik zemlje, one su do sada sačuvale svoju praktičnu vriednost, jer su mnoga mjerenja i izračunavanja izvršena na temelju tih dimenzija.

U sadašnje doba preporučuje Union géodesique et géophysique internationale prelaz na dimenzije Hayford-ova internacionalnoga rotacionog elipsoida kao najtočnije:

$a = 6\,378\,388$ m
$b = 6\,356\,912$ m
$\alpha = 1 : 297{,}0$

Tokom vremena dobivala je metoda odredjivanja oblika zemlje iz mjerenja teže sve veće značenje, čemu je mnogo pridonielo odkriće novih, zgodnijih putova za odredjenje teže. Već godine 1884. postavio je Helmert na temelju podataka mjerenja teže, izvršenih na 122 točaka, svoju prvu formulu za normalnu težu u morskom niveau-u kao funkciju geografske širine φ. Iz te formule dobivena je za zemljinu spljoštenost vriednost 1 : 299,26, koja se gotovo ne razlikuje od Bessel-ove. Godine 1900. bilo je već mjerenja teže izvršenih na 1400 mjesta zemljine površine. Iz tih podataka izveo je Helmert godine 1901. svoju drugu formulu za normalnu težu, a godine 1915., kad se je broj mjerenja teže popeo na 3000, Helmert je nanovo preračunao svoju formulu i dobio za normalnu težu u morskom niveau-u ovaj izraz:

$$\gamma = 978{,}052\ (1 + 0{,}005\,285 \sin^2\varphi - 0{,}000\,007 \sin^2 2\varphi)\ \text{gal}^{1)} \qquad \ldots 2)$$

Danas se primienjuje više formula za normalnu težu, čiji se koeficienti medjusobno nešto razlikuju zbog razlike u upotrebljenim podatcima mjerenja i načinima izračunavanja. Navodimo još internacionalnu formulu za normalnu težu:

$$\gamma = 978{,}049\ (1 + 0{,}005\,288 \sin^2\varphi - 0{,}000\,005 \sin^2 2\varphi)\ \text{gal} \qquad \ldots 2)^*$$

Koeficienti te formule udešeni su tako, da odgovaraju dimenzijama internacionalnoga elipsoida.

Kad je bila utvrdjena normalna razdioba teže na zemlji, postalo je moguće, da se uzporedi teža, neposredno izmjerena pomoću njihala, s normalnom težom. To uzporedjivanje pokazalo je znatne razlike vriednosti teže dobivenih opažanjem i reduciranih na morski niveau od normalnih vriednosti. Te razlike zovemo anomalijama teže.

Kad bi zemljina kora bila homogena bez ikakvih uzvisina i udubina, ne bi se mogle vriednosti teže, dobivene opažanjem, znatno razlikovati od normalnih. Me-

---

[1]) 1 gal = 1 cm . sec^{-2}.

djutim znamo iz izkustva, da već vanjski slojevi zemlje pokazuju znatne razlike i u gustoći i u svom obliku, pa te razlike uzrokuju spomenute anomalije teže. One dakle potječu iz razdiobe gustoće u zemljinoj kori i iz konfiguracije njezine površine, i u njima se zrcale razlike stvarne izgradnje masa od normalnog stanja izravnane, homogene zemljine kore.

U drugu ruku već kod izjednačenja astronomsko-geodetskih mjerenja pokazale su se nesuglasice, koje su bile veće, nego bi se moglo očekivati s obzirom na točnost ovih mjerenja. Predpostavka, da je zemlja, matematički rečeno, rotacioni elipsoid, morala se je ponovno izpitati. Kušalo se približiti se obliku zemlje pomoću troosnog elipsoida, kod kojega je i presjek po ekvatoru elipsa; izabirale su se i druge rotacione plohe, čiji su se meridianski presjeci nešto razlikovali od elipse, ali bez uspjeha, koji bi se dao izkoristiti u svrhe praktične geodezije. Konačno se je došlo do zaključka, da se zemljina ploha ne da uobće strogo definirati pomoću odredjenog matematičkog tijela, pa je kao oblik zemlje odabrana ona ploha, koja u svakoj svojoj točki stoji okomito na smjer viska, t. j. na smjer sile teže.

Zemlja ima medjutim bezkonačno mnogo takvih ploha. One obuhvataju jedna drugu i zovu se niveau — plohama. Jedna od njih — i to ona, koja ima visinu srednjeg morskog niveau-a, odnosno prolazi odredjenom normalnom nul-točkom — označuje se kao geoid. To je moderni oblik našega planeta. Geoid ima sva svojstva niveau-plohe, t. j. plohe, koja u svakoj svojoj točki stoji okomito na silu, koja prolazi tom točkom. Ta sila jest za geoid sila teže. Geoid je dakle niveau-ploha sile teže u visini mora.

Razvijemo li u red potencial sile teže, koji je, kako ćemo kasnije vidjeti, zbroj potenciala sile privlačenja i potenciala centrifugalne sile, dobit ćemo jednačbu niveau-ploha. Koeficienti tog razvoja poznati su pod imenom kuglinih funkcija. Ako medjutim razvoj u red ograničimo na prve članove, koji su ovisni samo o geografskoj širini, dobit ćemo rotacione plohe, koje predočuju samo obći tok niveau-ploha. Te približne plohe zovu se niveau-sferoidima, a jedna od njih predočuje, takodjer približno, geoid. Izpostavilo se je ,da se taj potonji niveau-sferoid samo vrlo malo razlikuje od rotacionog elipsoida. Ta ploha označuje se imenom zemljina sferoida i uzima se kao normalni oblik zemlje. Sila teže na zemljinom sferoidu ovisi takodjer samo o geografskoj širini, ima dakle normalnu vriednost, a dana je Herlmert-ovom (2), odnosno internacionalnom (2)* formulom za normalnu težu.

Rekli smo, da zemljin sferoid nije posve istovjetan s rotacionim elepsoidom istih osi, ali, budući da su medjusobne razlike tih ploha neznatne, možemo s dovoljnom točnošću promatrati rotacioni elipsoid kao normalni oblik zemlje i to tim prije, što se elipsoid može lakše matematički definirati nego sferoid, koji odgovara algebarskoj plohi 14. reda. Spominjemo još, da su Bruns i Helmert na dva različna načina pokazali, da se obje plohe, zemljin sferoid i rotacioni elipsoid, medjusobno udaljuju za najviše 19 m, tako da je u svim praktičnim slučajevima zamjena jedne plohe s drugom posve dopuštena.

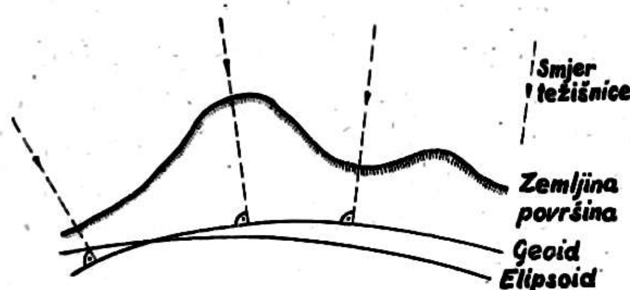
Geoid si možemo predočiti na ovaj način: zamislimo, da je površina mora na cieloj zemlji slobodna od svih utjecaja, koji nastaju od vjetra i valova, plime i osjeke, sadržaja soli, razlike temperature i t. d. i da se to idealizirano more nastavlja u obliku kanala izpod kontinenata.. Površina bi vode predočivala tada onu matematičku površinu zemlje, za koju je Listing uveo godine 1873. naziv geoida.

Geoid se ne da prikazati matematičkom formulom, možemo ga samo topografski opisati. Slično načinu, na koji se u topografiji mjere visine iznad nor-

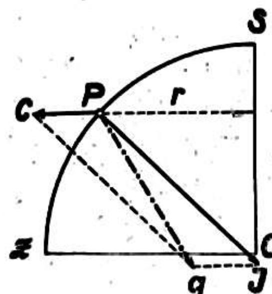
malne nule, i ovdje se traži na što više točaka razmak geoida od usvojenog elipsoida, na pr. Bessel-ova ili Hayford-ova. Rezultati se predočuju u obliku slojnica, sličnih slojnicama, kojima se prikazuju doline i visine u slojnim kartama.

Iz ovoga se već vidi, da je sadanja izmjera zemlje golem i mučan posao. Najprije se zamisli matematička ploha — elipsoid, iza toga se predoči druga ploha, fizičkim putem odredjena, — geoid, pa je zadaća izmjere, da se odredi, za koliko se te dvije zamišljene plohe razlikuju medjusobno a zatim i od stvarne zemljine površine.

Te razlike izmedju geoida i shodno odabranog elipsoida, ili, kako se obično kaže, geoidne undulacije, uzrokovane su nepravilnostima u razdiobi masa na površini i u nutrini zemljine kore. One su od velikog značenja za geodetska i geofizička istraživanja našeg planeta. Kako operaciju niveliranja vežemo za geoid, možemo iz visinskih podataka odrediti pravi oblik zemljine plohe poznavajući samo geoidne undulacije; na temelju geoidnih undulacija možemo zaključivati o razdiobi masa i o stanju ravnoteže zemljine kore, pa konačno i redukciju mjerenjem dobivenih vriednosti možemo strogo provesti samo u slučaju, ako su poznate geoidne undulacije.



Sl. 3.



Sl. 4.

Razlike izmedju geoida i zemljina sferoida, odnosno rotacionog elipsoida, očituju se u tome, da se smjer težištnice ne podudara s normalama sferoida, odnosno elipsoida, i da se vriednosti sile teže razlikuju od normalnih vriednosti. Odatle sliedi, da se oblik geoida može odrediti na dva načina: iz odklona težištnice i iz anomalija teže.

Iz definicije geoida kao niveau-plohe sile teže jasno sliedi, da težištnica, koja u svakoj svojoj točki ima smjer sile teže, odnosno viska, stoji svuda okomito na niveau-plohama. Drugim riečima, smjer težištnice u svakoj točki geoida podudara se sa smjerom geoidne normale u toj točki. Kako geoid ima samo približno oblik zemljina sferoida, odnosno shodno izabranog elipsoida, na pr. Bessel-ova ili Hayfordova, opažaju se kod astronomsko-geodetskih mjerenja t. zv. odkloni težištnice, pod kojima se razumievaju mali kutovi, koje zatvaraju normale geoida, t. j. pravi smjer sile teže, s normalama elipsoida. Odkloni težištnice izračunavaju se tako, da se uzporedjuju astronomske i geodetske koordinate pojedinih točaka zemljine površine. U tu svrhu treba razviti gustu mrežu točaka, u kojima se astronomskim putem odredjuju duljine i širine tih točaka. Ako se uzme, da se u jednoj od tih točaka smjer težištnice podudara sa smjerom normale elipsoida, onda se mogu pomoću triangulacije izračunati geodetske, t. j. elipsoidne duljine i širine za sve ostale točke mreže. Uzporedbom astronomskih i geodetskih koordinata istih točaka dobiju se traženi odkloni težištnice od normala usvojenog elipsoida.

Iz odklona težištnice možemo izračunati geoid s relativno velikom točnošću, ako imamo medjusobno povezane triangulacione mreže. Budući da se oceani ne mogu premostiti trigonometričkim mrežama, nema mogućnosti, da se spoje u jednu cjelinu pojedini dielovi geoida na navedeni način, te samo na kontinentima i

njima blizkim otocima možemo iz astronomsko-geodetskih mjerenja odrediti dielove geoida.

Na druge teškoće nailazimo pri odredjivanju oblika geoida iz anomalija teže. Cilj je bio, da se pronadju načini i instrumenti, koji bi omogućili mjerenja teže u svim točkama zemljine površine, dakle i na pučini.

Već početkom ovog stoljeća izveo je Hecker[1]) s dobrim uspjehom mjerenja teže na moru upotriebivši u tu svrhu hipsometar, aparat, koji odredjuje s velikom točnošću temperaturu vrienja vode. Načelo tih mjerenja je jednostavno. Budući da visina živina stupa u barometru ovisi o pritisku atmosfere i o težini žive, koja se mienja prema razdiobi sile teže na zemlji, a jer temperatura vrienja vode, koja se očitava na hipsometru, ne ovisi o sili teže, mogu se iz uzporedjivanja podataka barometra i hipsometra izračunati anomalije teže. Hecker-ova mjerenja, izvedena na Atlantskom, Indijskom i Tihom Oceanu, pokazala su, da na pučini u glavnom vlada gotovo normalna teža, dana Helmert-ovom formulom, a tek su na pojedinim mjestima bili opaženi poremećaji teže.

Kako je u godinama 1923.—1932. Nizozemac Vening-Meinesz[2]) uspio izvesti mjerenja teže pomoću njihala na podmornici, a kako i pokusi sa statičkim težometrom opravdavaju nadu, da će se u blizkoj budućnosti konstruirati vrlo savršeni instrumenti za mjerenje teže na pučini, moći će se izvesti mjerenja teže u svakoj točki zemlje.

Odredjivanje geoidnih undulacija iz anomalija teže ne da se provesti s istom točnošću kao izračunavanje dielova geoida iz odklona težištnica. Ono ipak daje oblik geoida kao cjeline za čitavu zemlju, pa ga možemo primieniti, čim budemo imali dovoljan broj vriednosti teže jednolično rasporedjenih po zemljinoj površini.

Mjerenja teže vrše se poglavito pomoću njihala. Kako ćemo kasnije vidjeti, ta mjerenja ne omogućuju potanko izpitivanje geoidnih undulacija u uzkom ograničenom prostoru. To izpitivanje omogućeno je instrumentom, koji je konstruirao i teoretski obrazložio njegov pronalazač barun Roland von Eötvös, profesor sveučilišta u Budimpešti († 1919). Taj instrument, gravitacioni variometar, nazvao je Helmert, uporedo s libelom, najdivnijim instrumentom više geodezije, jer on, iako vrlo jednostavan u svojim načelima, daje pri pravilnoj primjeni najvažnije i najobsežnije podatke o obliku zemlje i strukturi njezine kore. Pomoću variometra ne odredjuje se teža sama, već njezine promjene pri pomaku za jedan cm, kao i t. zv. veličine zakrivljenosti niveau-ploha. Time je ostvarena nova gravimetrijska metoda, koja je omogućila odredjivanje pravog oblika malih i ograničenih dielova zemljine plohe.

U drugu ruku, iz promjene teže i veličina zakrivljenosti niveau-ploha dadu se izvesti s geološkog stanovišta vrlo važni zaključci o razdiobi masa u zemljinoj kori i o njezinoj strukturi. Rekli smo već, da su razlike izmedju geoida i zemljina sferoida, odnosno shodno odabranog elipsoida, uzrokovane nepravilnostima u razdiobi masa na površini i u nutrini zemljine kore. Sve te nepravilnosti zrcale se u obliku geoida, te na temelju geoidnih undulacija možemo suditi o sastavu zemljine kore. Dok za praktičnu geologiju odredjivanje odklona težištnica nema nikakva značenja zbog složenosti te metode, dotle se odredjivanje teže pomoću njihala

---

[1]) O. Hecker, Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean sowie in Rio de Janeiro, Lissabon und Madrid, Berlin 1903. O. Hecker, Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ozean und an deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen, Berlin 1908., i dr.

[2]) F. A. Vening-Meinesz, Ergebnisse der Schwerkraftbeobachtungen auf dem Meere in den Jahren 1923—1932, Leipzig, 1934.

važno za izpitivanje položaja i razprostiranja velikih geoloških formacija. Ali za iznalaženje i lokalizaciju manjih formacija, koje su u većini slučajeva za praktičnu geologiju i rudarstvo od goleme važnosti, Eötvös-ov variometar ima najveće značenje i najširu primjenu.

2. Sila teže, njezine komponente i anomalije, mjerenja smjera i intenziteta teže

Kako vidimo, upoznavanje oblika i dimenzije zemlje upućuje nas na proučavanje sile teže. Kako kod svake sile, tako i kod sile teže razlikujemo dva elementa, a to su smjer sile teže i njezina veličina, odnosno intenzitet.

Smjer sile teže zadan je viskom. U načelu odredjuje i libela isti smjer. Veličina sile teže definira se kao sila, koja djeluje na jedinicu mase — gram, i izrazuje se u jedinicama cgs sustava, t. j. u dinima.

Rekli smo već, da je sila teže rezultanta privlačne i centrifugalne sile, koja je nastala zbog rotacije zemlje oko njezine osi.

U slici 4. predočuje luk SPZ meridian zemljine plohe, SO rotacionu os, Z točku ekvatora. Na točku P zemljine plohe djeluje sila privlačenja, koja je označena strjelicom PJ, dok strjelica PC prikazuje centrifugalnu silu, koja je hotimice nanesena nerazmjerno velikom. Pg je rezultanta obiju sila, t. j. sila teže.

Promotrimo posebno obje komponente sile teže!

S i l a   p r i v l a č e n j a. Odkriće pojave, da se sva tiela medjusobno privlače, dugujemo Isac-u Newton-u. Prema njegovom, već spomenutom, zakonu gravitacije izmedju zemljine mase *M* i mase *m* nekoga, s obzirom na zemlju malog tiela, koje se nalazi u udaljenosti *d* od središta zemlje, djeluje sila privlačenja:

$$I = f \frac{M . m}{d^2} \qquad \ldots 3)$$

gdje je *f* konstanta gravitacije. To je sila, kojom se medjusobno privlače dvie materialne točke mase 1 g u udaljenosti jednakoj 1 cm.

Pokusnim putem dobivena je za gravitacionu konstantu ova vriednost:

$$f = 0{,}000\,000\,066\,63 = 66{,}63 \,.\, 10^{-9} \doteq \frac{200}{3}\, 10^{-9}\, cm^3\, g^{-1}\, sec^{-2}$$

Ako gornji izraz za silu privlačenja *I* napišemo u obliku

$$I = m . f . \frac{M}{d^2}$$

i uzmemo u obzir, da je sila jednaka produktu mase i akceleracije, vidimo, da na tielo mase *m* djeluje akceleracija

$$a = f \frac{M}{d^2}$$

Iz tog izraza sliedi, da akceleracija, koju dobiva tielo uslied privlačnog djelovanja zemlje, ovisi jedino o masi zemlje i o udaljenosti tiela od zemlje. Drugim riečima, sva tiela, koja su jednako udaljena od središta zemlje, dobivaju uslied gravitacije istu akceleraciju (u vakuumu).

Izpitivanja, izvedena uz pripomoć sadašnje visoko razvijene tehnike mjerenja, potvrdila su pravilnost tog zaključka i pokazala, da Newton-ov zakon vriedi i za male mase u laboratoriju i za ogromna tiela u svemiru, i da privlačna sila ne ovisi niti o fizičkom ili kemijskom sastavu materije (temperaturi, gibanju i t. d.),

niti o medjusredstvu, niti o vremenu, t. j. brzina njezinog razprostiranja je bezkonačno velika.[1])

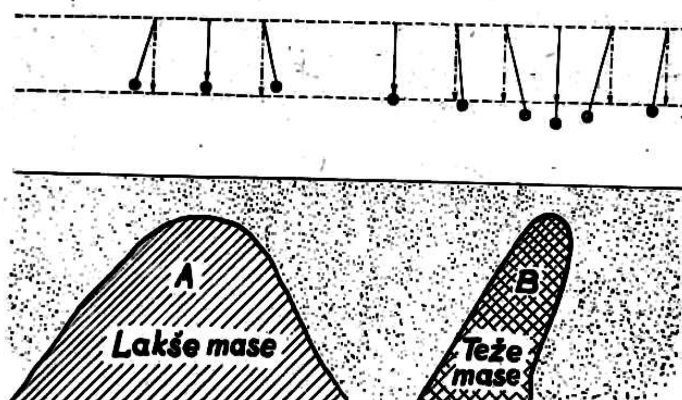
C e n t r i f u g a l n a s i l a. Centrifugalna sila djeluje uviek po polumjeru pripadne paralele i zadana je izrazom

$$C = m.r.\omega^2 \qquad \ldots 4)$$

To znači, da je centrifugalna sila upravno razmjerna masi tiela *m*, njegovoj udaljenosti *r* od osi rotacije kao i kvadratu kutne brzine rotacije ω. Iz toga sliedi, da je centrifugalna sila jednaka nuli na polovima, a dalje raste prema ekvatoru, gdje postizava svoju najveću vriednost, koja približno iznosi 1/300 privlačne sile.

Na svaku točku zemlje djeluju dakle dvie sile: privlačna i centrifugalna sila. Budući da centrifugalna sila *C* zatvara s privlačnom silom *J* kutove, koji su veći od 90° (vidi sl. 4.), umanjuje centrifugalna sila djelovanje privlačne sile i to tim jače, čim je centrifugalna sila veća. Drugim riečima, sila teže, koja je rezultanta ovih sila, u svim točkama osim polova manja je od privlačne sile, a kako centrifugalna sila opada, dok privlačna sila raste, ako se krećemo od ekvatora prema polu, raste i sila teže od ekvatora prema polu i to približno za 5/1000 svog srednjega iznosa.

To su pravilne ili t. zv. normalne promjene teže. Njihove vriednosti možemo lako izračunati po Helmert-ovoj formuli (2), odnosno (2)* uz predpostavku, da je zemlja niveau-sferoid, odnosno rotacioni elipsoid, Besselovih ili Hayfordovih dimenzija.



Sl. 5.

Izmedju tih normalnih promjena teže i stvarnih promjena, dobivenih mjerenjem, opažaju se izvjestne nepravilne razlike, a to su već spomenute anomalije teže, koje su uzrokovane nejednolikošću zemljine površine i sastava zemljine kore. Pokažimo potanko i pregledno uzroke tih nepravilnosti u toku zemljine teže.

Kako znamo, zemljina površina nije gladka, ona je djelomično ravna, a djelomično brdovita. U drugu ruku, po svom sastavu zemljina kora nije homogena, već se sastoji od slojeva različne gustoće. Da vidljive uzvisine zemljine plohe uzrokuju poremećaje sile teže, poznato je davno. U blizini velikih brdskih masa opaža se odklon viska prema brdima, mienja se dakle smjer sile teže. Slične poremećaje uzrokuju takodjer slojevi različne gustoće, koji leže izpod zemljine površine. Kako je sila privlačenja razmjerna masama, privlače slojevi različne gustoće u različnoj

---

[1]) Vidi, na pr., vrlo zanimljiva iztraživanja zakona gravitacije, koja su izveli pomoću variometra Eötvös, Pekár i Fekete, a koja je sveučilište u Göttingenu nagradilo prvom nagradom.

D. Pekár: Das Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität, Die Naturwissenschaften, 1919. O istim istraživanjima govori i Eötvös: R. Eötvös: Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn, besonders über Beobachtung mit der Drehwage. Verh. d. XVI. allg. Konf. d. internat. Erdmessung in London und Cambridge 1909.

mjeri, i tako nastaju razlike izmedju stvarne i normalne teže, koje na prvi pogled izgledaju nepravilnima. U slici 5. prikazano je to djelovanje slojeva različne gustoće na smjer i veličinu sile teže, pri čemu je zemljina površina narisana horizontalno u obliku pravca, jer je predočen samo neznatan njen dio, a cilj je slike što zorniji shematski prikaz promjena sile teže.

Djelovanje lakših i težih masa na silu teže, mjerenu na zemljinoj površini, izrazit će se tako, kako pokazuju narisani visci. Poradi uzporedjenja nanesene su u slici u obliku strjelica i normalne vriednosti sile teže, koje se odnose na slučaj, kada bi zemljina kora imala normalni oblik i bila homogena. Pod normalnim oblikom mislimo ovdje oblik niveau-sferoida. Promatramo li narisane viske, opažamo odklone sile teže i u veličini i u smjeru. S obzirom na veličinu sile teže vidimo, da teže mase *B* izvode jače privlačenje nego površinski sloj neposredno iznad njih. Udaljujemo li se od teže mase, umanjuje se njezino privlačno djelovanje, visci postaju kraći, dok konačno na velikoj udaljenosti ne prime svoju normalnu veličinu. Sila teže ima tada svoju normalnu vriednost.

S obzirom na smjer sile teže opažamo, da se visci okreću prema gušćem sloju zbog većeg privlačnog djelovanja tog sloja. Što se više udaljujemo od te teže mase, to jače opada odklon u smjeru. Na velikoj udaljenosti taj odklon konačno praktički izčezava i sila teže prima svoj normalni smjer. Slično djelovanje vrše i lakše mase A. Sila teže je tu manja od normalne, a visci se odklanjaju u suprotnu stranu. Treba spomenuti, da je djelovanje masa prikazano u slici nerazmjerno pretjerano; stvarno je ono veoma maleno i to zbog neznatnog iznosa gravitacione konstante. Čak kod znatnih poremećaja, uzevši u obzir najveće odklone, iznosi neslaganje u veličini sile teže samo nekoliko stotisućnih dielova sile teže, a odkloni od normalnog smjera samo nekoliko lučnih sekunda. Kada bi slika točno odgovarala pravim odnosima, visci i strjelice bi se podudarali kao da nema nikakvog odklona ni poremećaja.

Kažimo sada nekoliko rieči o odredjenju smjera i intenziteta sile teže.

Smjer sile teže u svakoj točki zemljine površine, t. j. smjer viska ili težištnice odredjen je s dva kuta:

a) geografskom širinom, t. j. kutom izmedju težištnice i ravnine ekvatora, i

b) geografskom duljinom, t. j. kutom ,koji ravnina meridiana dotične točke zatvara s ravninom Greenwich-kog meridiana. Poremećaji u smjeru sile teže, odnosno odkloni težištnice, jesu, kako znamo, odkloni fizičkih težištnica ili normala geoida od pripadnih normala zemljinog sferoida ili normala izvjestnog rotacionog elipsoida, na koji se odnose karte trigonometričke izmjere dotične države. O izračunavanju odklona težištnice već smo u kratko rekli u prvom poglavlju. Navedenome dodajmo još nekoliko rieči. Odklon težištnice pojavljuje se ne samo u ravnini meridiana dotične točke, već se obćenito proteže koso na tu ravninu. Stoga se djelovanje odklona težištnice osjeća i u širini, i u duljini; u kratko se kaže »odklon težištnice u širini« i »odklon težištnice u duljini«. Jasno je, da se utjecaj odklona težištnice očituje i pri svakom mjerenju azimuta. U tom se slučaju ukratko govori o »odklonu težištnice u azimutu«. Praktički odkloni težištnice pojavljuju se svuda tamo, gdje su točke odredjene i geodetskim i astronomskim putem, pa odkloni težištnice u širini i duljini nisu ništa drugo nego razlike izmedju astronomskog i geodetskog odredjenja geografske širine i duljine dotične točke, naravno ako se ne uzmu u obzir pogrješke mjerenja. Slično tomu daje razlika izmedju geodetskog i astronomskog odredjenja azimuta odklon težištnice u azimutu.

Geografske koordinate odredjuju podpuno položaj svake točke, prema tome i azimut svake stanice, koja leži izmedju točaka, čije su geografske koordinate

poznate. Stoga mora postajati ovisnost komponenata odklona težištnice u širini, u duljini i u azimutu. Ta ovisnost izmedju odklona težištnice u duljini i u azimutu poznata je pod imenom Laplace-ove relacije:

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda . \sin\varphi_2$$

Ovdje su: $\Delta\alpha$ — komponenta odklona težištnice u azimutu izmedju polazne točke P_1, u kojoj se predpostavlja, da je odklon težištnice jednak nuli ,i točke P_2.

$\Delta\lambda$ — komponenta odklona u dužini izmedju tih točaka.

φ_2 — geodetska širina točke P_2.

Laplace-ova relacija daje mogućnost kontrolirati, da li je odredjeni sustav odklona težištnice uobće moguć, i dok je ta relacija zadovoljena, može se smatrati, da su odkloni realni. Izvjestne nesuglasice,, koje još preostaju, uzrokovane su neizbježivim pogrješkama mjerenja i njihovim nagomilavanjem. Laplace-ova relacija ima veliko značenje za proučavanje geoida, te je vrlo važno, da se što više poveća broj Laplace-ovih točaka, t. j. točaka, u kojima će se mjeriti sve tri veličine.[1])



Sl. 6.

Mjerenja intenziteta teže vrše se poglavito s pomoću njihala. Ta mjerenja pripadaju, zbog mnogih faktora, koji utječu na vrieme titraja njihala, medju najzamršenija precizna mjerenja, jer se ide za tim, da se vrieme titraja, koje obično traje polovinu sekunde, izmjeri na 10^{-7} sekunde točno.

Načelo mjerenja počiva na poznatom zakonu, koji veže silu teže s vremenom titraja njihala. Za jednostavno vrieme titraja T matematičkog njihala dužine l vriedi ova formula (u kojoj je φ amplituda, a g tražena vriednost teže):

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \ldots \right\}.$$

U dinamici krutih tiela pokazuje se, da se fizičko njihalo vlada kao matematičko, čija je duljina:

$$l = \frac{I}{M.h},$$

gdje je I moment tromosti cjelokupnog njihala s obzirom na os rotacije, M masa, a h udaljenost težišta njihala od osi rotacije.

Mjerenja absolutne vriednosti teže vrše se reverzionim njihalom. Absolutna mjerenja spadaju u najsloženije i najteže radove, pa se izvode samo u pojedinim glavnim točkama, obično u laboratorijima.

Mnogo su jednostavnija relativna mjerenja, t. j. mjerenja razlike teže izmedju pojedinih točaka zemljine površine. Ta se mjerenja vrše njihalima stalne duljine (invariabla njihala). Vriednosti teže g_1 i g_2 u točkama A_1 i A_2 odnose se tada kao recipročni kvadrati vremena njihaja T_1 i T_2:

[1]) Potanje o odklonima težištnice vidi dalje poglavlje 17.

$$g_1 : g_2 = \frac{1}{T_1^2} : \frac{1}{T_2^2},$$

pa se imaju odrediti samo vremena titraja istog njihala u tim točkama A_1 i A_2. Kako je poznata absolutna vriednost teže g_1 u glavnoj polaznoj točki A_1, onda se može izračunati teža g_2 u nekoj drugoj točki A_2, jer iz gornje formule sliedi:

$$g_2 = g_1 \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

Ta su mjerenja dala bogato gradivo, koje je dovelo, kako znamo, do sasvim novih gledišta na oblik zemlje i na strukturu njezine kore.

Medjutim i kod najpažljivijeg izvodjenja mjerenja njihalom mjere se razlike, odnosno promjene teže samo do na 1.10^{-3} cgs točno, pa ta mjerenja dopuštaju odredjivanje prostorne razdiobe teže samo u većim udaljenostima, koje iznose nekoliko kilometara, jer su promjene teže veoma malene. Traži li se razdioba teže u užim granicama, potrebno je bitno povećanje točnosti opažanja, što danas tim putem nije moguće postići.

3. Gravitacioni variometar i okretna vaga, načelo i točnost mjerenja.

Krajem prošlog stoljeća došao je iztaknuti madjarski fizik Dr. Roland von Eötvös na misao, ne bi li se dao konstruirati instrument, kojim bi se moglo mjeriti promjene sile teže u uzkom ograničenom prostoru, u okviru samoga instrumenta, koji ne bi mjerio silu teže samu, već neposredno njezine promjene, t. j. horizontalne komponente gradienta sile teže i izvjestne veličine, koje služe za odredjivanje oblika niveau-ploha teže.

Kod konstrukcije tog instrumenta prva se težkoća sastojala u zahtjevu najveće osjetljivosti. Budući da su promjene sile teže veoma malene, imao ih je instrument mjeriti s točnošću do 1.10^{-9} cgs (dina) točno. Da postigne tu izvanrednu točnost mjerenja, primienio je Eötvös okretnu vagu i na načelu te vage konstruirao svoj gravitacioni variometar, a godine 1896. nakon osmogodišnjeg rada dokazao je, da se tim instrumentom mogu neposredno odrediti prostorne promjene (variacije) sile teže kao i odnosi zakrivljenosti niveau-ploha teže i to do na 1.10^{-9} cgs točno. Ova jedinica 1.10^{-9} cgs $= 10^{-9}$ sec^{-2} označuje se na priedlog W. Schweydar-a[1]) i J. Königsberger-a[2]) slovom E (Eötvösova jedinica).

Da si predočimo veličinu te jedinice, sjetimo se, da je 1 cgs odnosno 1 din ona sila, koja masi 1 g daje u 1 sec akceleraciju 1 cm. Kako sila teže daje na zemljinoj površini masi 1 g akceleraciju, koja je okruglo jednaka 980 cm, iznosi veličina teže približno 980 dina. Prema tome vrši 1 g na svoju podlogu pritisak, koji je jednak 980 dina, ili 1 din približno odgovara pritisku jednog miligrama. Eötvös-ova jedinica $E = 1.10^{-9}$ cgs, u kojoj su izražene sve veličine mjerene variometrom, odgovara dakle tlaku jednog miliardnog diela miligrama!

Svoja prva proučavanja o variometru izložio je Eötvös na XV. medjunarodnoj konferenciji za izmjeru zemlje održanoj u Budimpešti 1906. godine, a publicirao ih je pod naslovom »Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwage«. (Verh. d. XV. allg. Konferenz d. intern. Erdmessung in Budapest 1906.).

Rekli smo već, da variometar počiva na načelu okretne vage. Okretnu vagu uveo je u fiziku Coulomb krajem XVIII. vieka za proučavanje zakona o uzajam-

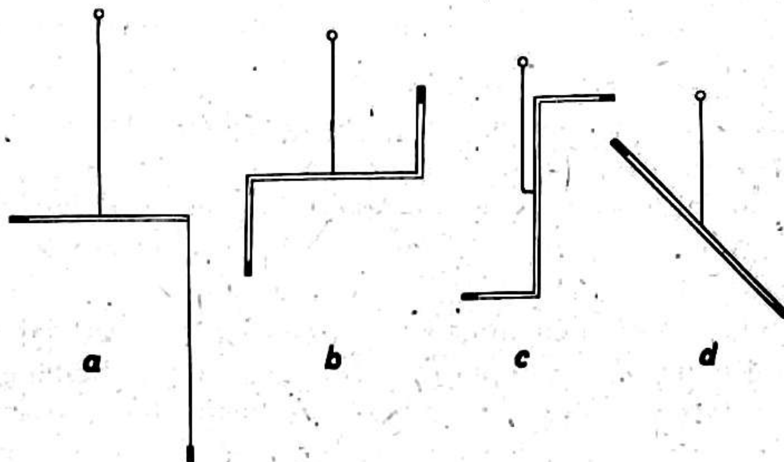
[1]) W. Schweydar, Die topographische Korrektion bei Schweremessungen mit der Torzionswage, Zeitschr. f. Geophysik I, 1924, br. 3.

[2]) J. Königsberger, Feststellung der Grenze und Tiefe überdeckter Salzstöcke mit der Drehwage nach Eötvös, Zeitschr. Petroleum 20, 1924.

nom djelovanju elektriziranih tiela. Godine 1798. primienio je Cavendish okretnu vagu za odredjenje gravitacione konstante opažajući odklone i vrieme njihaja poluge vage pod utjecajem privlačnog djelovanja olovnih kugala. Kasnije su učenjaci često ponavljali te pokuse uz savršenije načine opažanja.

Na vrlo tankoj metalnoj ili kremenoj niti objesi se u horizontalnom položaju veoma laka poluga s jednakim utezima na krajevima. Vaga, prepuštena sama sebi, doći će nakon nekog vremena u stanje mirovanja i njezina poluga će se smjestiti u nekom odredjenom azimutu. Približimo li jednom od utega neku znatnu masu, ta će masa uslied Newton-ova privlačenja privući sebi uteg, pa će se poluga vage zaokrenuti za kut, kod kojega će sila uzajamnog privlačenja utega i mase biti uravnotežena silama, koje se pojavljuju u niti zbog njene torzije. Taj kut zaokreta vage toliko je doduše malen, da se neposredno ne da izmjeriti, ali ako se promatra odklon zrake reflektirane od zrcala smještenog na poluzi vage, može se taj kut izračunati iz puta zrake na skali.

Okretna vaga, koju je prvobitno upotriebio Eötvös (samo u laboratoriju), bila je samo Cavendish-ova vaga u preciznijoj izradbi.



Sl. 7.

Nu okretna vaga suvremenog gravitacionog variometra razlikuje se od Coulomb-ove vage time, što su njezini utezi smješteni na različnoj visini, a to se postizava ili tako, da se jedan uteg objesi o tanku žicu na kraju poluge (sl. 7.a), ili se poluzi vage daje poseban oblik (sl. 7.b i c), ili se poluga vage objesi u kosom položaju (sl. 7.d).

Takav oblik vage dopušta, da se iz opažanja položaja ravnoteže vage i konstanata instrumenta izračunaju četiri veličine: dvie veličine predočuju promjenu sile teže pri pomaku za jedan centimetar u dva medjusobno okomita smjera u horizontalnoj ravnini, t. j. one daju horizontalne komponente gradienta sile teže, dok druge dvije karakteriziraju oblik niveau-plohe u točki opažanja.

Jasno je, da na vagu ne djeluje čitava sila teže, jer se vaga njiše u horizontalnom smjeru, te je okreću samo horizontalne sile. Te sile nastaju na taj način, što sila teže, koja djeluje na obim krajevima poluge, ima različni smjer, te je baš zato taj instrument osobito podesan za mjerenje malih sila.

Tim je bila stvorena nova metoda za odredjivanje promjena sile teže na kratkim horizontalnim udaljenostima i to s točnošću, koja je milijun puta veća od točnosti, koju daje njihalo.

Naravno, pri tako velikoj osjetljivosti instrumenta morala se je posvetiti osobita pažnja zaštiti instrumenta od uzdušnih struja i kolebanja temperature. U tu svrhu smješteni su svi dielovi vage u kutiji i u cievima s trostrukim metalnim stienama.

4. Matematička podloga teorije gravitacionog variometra

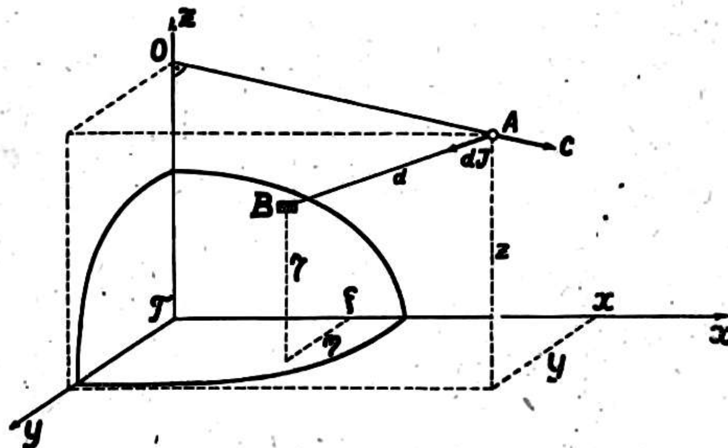
Promjene sile teže, koje nastaju pri pomaku za jedan cm, a mjere se variometrom, nisu drugo no druge parcialne derivacije potenciala sile teže. Isto tako se iz vriednosti drugih diferencialnih kvocienata potenciala sile teže računaju veličine, koje karakteriziraju oblik niveau-plohe u točki opažanja. Da to pokažemo, izvest ćemo pojam potenciala sile teže i rastumačit ćemo fizičko značenje njegovih prvih i drugih diferencialnih kvocienata, a isto tako izložit ćemo svojstva i zakrivljenost niveau-ploha teže.

a) Potencial sile teže i njegovi prvi i drugi diferencialni kvocienti

Rekli smo već, da je sila teže rezultanta sile zemljinog privlačenja i centrifugalne sile. Počet ćemo s izpitivanjem prve komponente sile teže.

Ne čineći nikakvih predpostavaka o vanjskom obliku i nutarnjem sastavu zemlje, uzmimo težište zemlje *T* za izhodište koordinatnog sustava XYZ, čija os Z leži u osi rotacije zemlje, a koordinatne osi *X* i *Y* u ravnini ekvatora. (Sl. 8.)

Neka je *B* neka po volji na zemljinoj površini uzeta čestica mase *dM*, kojoj su koordinate ξ, η i ζ, a *A* je materialna točka mase 1, koja se nalazi izvan zemlje u udaljenosti *d* od čestice *B* i koja se okreće zajedno sa zemljom. Koordinate te točke *A* neka su *x, y* i *z*.



Sl. 8.

Prema Newton-ovu zakonu gravitacije sila *dJ*, s kojom zemljina čestica *B* privlači točku *A*, glasi:

$$dJ = f\,\frac{dM\,.\,1}{d^2} \qquad \ldots (a)$$

Tu silu *dJ* razstavimo u komponente dJ_x, dJ_y i dJ_z u smjeru koordinatnih osi *x, y, z*. Zatvara li sila *dJ* s koordinatnim osima kutove α_1, β_1 i γ_1, bit će

$$\cos\alpha_1 = \frac{x-\xi}{d}\,;\ \cos\beta_1 = \frac{y-\eta}{d}\,;\ \cos\gamma_1 = \frac{z-\xi}{d},$$

a komponente sile *dJ* glase:

$$dJ_x = dJ\,.\cos\alpha_1 = dJ\,\frac{x-\xi}{d}$$

$$dJ_y = dJ\,.\cos\beta_1 = dJ\,\frac{y-\eta}{d}$$

$$dJ_z = dJ\,.\cos\gamma_1 = dJ\,\frac{z-\zeta}{d}$$

Uvrštenjem izraza (a) u te jednačbe dobivamo:

$$dJ_x = f \frac{x - \xi}{d^3} dM$$

$$dJ_y = f \frac{y - \eta}{d^3} dM$$

$$dJ_z = f \frac{z - \zeta}{d^3} dM$$

Da odredimo komponente sile *J*, s kojom čitava zemlja privlači točku *A* mase *1*, moramo gornje jednadžbe integrirati protegnuvši integraciju na čitavu masu zemlje *M:*

$J_x = f \int_M \frac{x - \xi}{d^3} dM$, komponenta sile privlačenja u smjeru osi *X*

$J_y = f \int_M \frac{y - \eta}{d^3} dM$, » » » » » » *Y*

$J_z = f \int_M \frac{z - \zeta}{d^3} dM$, » » » » » » *Z*.

Francuzki matematik L a g r a n g e prvi je opazio, da u osnovi navedenih komponenata privlačne sile leži posebna funkcija sila, koja omogućuje provedbu integracije. Tu funkciju nazvao je G r e e n potencialnom funkcijom, a G a u s s ukratko potencialom.

Pod potencialom privlačne sile razumiemo takvu funkciju V (x, y, z), čije su parcialne derivacije po koordinatima *x, y* i *z* jednake komponentama J_x, J_y i J_z privlačne sile *J*. Vidimo, da je potencial funkcija mjesta i to samo funkcija mjesta, jer su vriednosti potenciala posve odredjene, čim su zadane koordinate svake točke.

Pokažimo, da potencial sile privlačenja *J* glasi:

$$V(x, y, z) = f \int_M \frac{dM}{d}$$

U tu svrhu parcialno derivirajmo taj izraz po *x, y* i *z*, uzevši u obzir, da je *d* takodjer funkcija koordinata:

derivacija po x daje: $\frac{\partial V}{\partial x} = f \int_M \frac{\partial \left(\frac{dM}{d}\right)}{\partial d} \cdot \frac{\partial d}{\partial x}$

odatle je: $\frac{\partial V}{\partial x} = - f \int_M \frac{dM}{d^2} \frac{\partial d}{\partial x}$

Sjetimo se, da je udaljenost $d = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, pa ćemo vidjeti, da je $\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{x-\xi}{d}$.

Uvrštenje toga izraza daje $\frac{\partial V}{\partial x} = - f \int_M \frac{x - \xi}{d^3} dM$

Analogno: $\frac{\partial V}{\partial y} = - f \int_M \frac{y - \eta}{d^3} dM$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - f \int_M \frac{z - \zeta}{d^3} dM,$$

a to su gore navedeni izrazi za J_x, J_y i J_z samo s protivnim predznacima, koji pokazuju, da su komponente privlačne sile *J* upravljene u stranu smanjivanja koordinata *x, y* i *z*.